IV.2 REŠAVANJE SLOŽENIH ELEKTRIČNIH KOLA PRIMENOM KOMPLEKSNOG RAČUNA

IV.2.1 PREDSTAVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIM IZRAZIMA

TEORIJSKA OSNOVA

- Rešavanje složenih električnih mreža primenom trigonometrijskog računa dosta je složeno. Zato se uvodi rešavanje složenih mreža primenom kompleksnog računa.

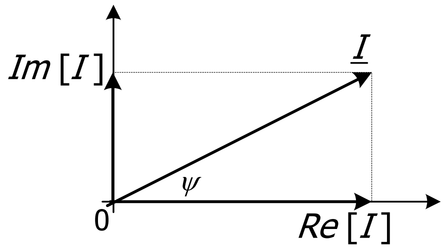
- Kako se realne fizičke veličine predstavljaju kompleksnim izrazima?
  - Kompleksni izrazi za napon i električnu struju su eksponencijalni oblici kompleksnog broja:

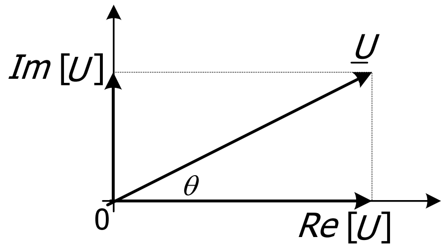
$\underline{U} = Ue^{j\theta}$ $\quad U$ – efektivna vrednost prostoperiodičnog napona

$\underline{I} = Ie^{j\psi}$ $\quad I$ – efektivna vrednost prostoperiodične struje

θ - početna faza napona

ψ - početna faza struje





  - Kompleksni izraz za impedansu dobija se kao količnik kompleksnih izraza za napon i struju:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{U}{I}e^{j(\theta-\psi)} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX .$$

  - Kompleksni izraz za admitansu dobija se kao količnik kompleksnih izraza za struju i napon:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{Ie^{j\psi}}{Ue^{j\theta}} = \frac{I}{U}e^{j(\psi-\theta)} = Ye^{j\nu} = Y\cos\nu + jY\sin\nu = G + jB .$$

  - Kompleksni izraz za prividnu snagu dobija se kao proizvod kompleksnog izraza za napon i konjugovano kompleksnog izraza za struju:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = Ue^{j\vartheta}Ie^{-j\psi} = UIe^{j(\theta-\psi)} = Se^{j\varphi} = S\cos\varphi + S\sin\varphi = P + jQ .$$

- Sve ove veličine se proračunavaju prema pravilima o kompleksnim brojevima.

- Iz kompleksnih izraza za impedansu, admitansu i prividnu snagu sledi:
  - Realni deo kompleksnog izraza odgovara aktivnoj veličini (otpornost, provodnost ili snaga).
  - Imaginarni deo kompleksnog izraza odgovara reaktivnoj veličini (otpornost, provodnost ili snaga).
  - Prividne veličine se dobijaju po pravilu proračuna realnih veličina (ili proračuna modula kompleksnog broja, što je isto):

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

ZADACI

IV.2.1.1 Za sledeće struje i napone, za koje su dati izrazi po kojima se menjaju njihove trenutne vrednosti, napisati izraze u kompleksnom obliku:

a) $i_1(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(10^4 t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ A ,

b) $u_1(t) = 4\sin\left(314t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ V ,

c) $i_2(t) = \sin\omega t$ A .

Rešenje:

a) Analizirajući izraz po kome se menja trenutna vrednost struje $i_1(t)$ zaključujemo da je:

- amplituda $I_{1\mathrm{m}} = 2\sqrt{2}$ A,
- efektivna vrednost $I_1 = \dfrac{I_{1\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}\ \mathrm{A}}{\sqrt{2}} = 2$ A,
- kružna učestanost $\omega = 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$,
- početna faza $\psi_1 = \dfrac{\pi}{6}$.

Kompleksni izraz za jačinu struje je:

$$\underline{I}_1 = I_1\,\mathrm{e}^{j\psi_1} = 2\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}}.$$

Primetimo da smo za oznaku kompleksne veličine uveli crtu ispod oznake veličine. Da bismo odredili realni i imaginarni deo kompleksnog izraza ove struje primenimo Ojlerovi formulu:

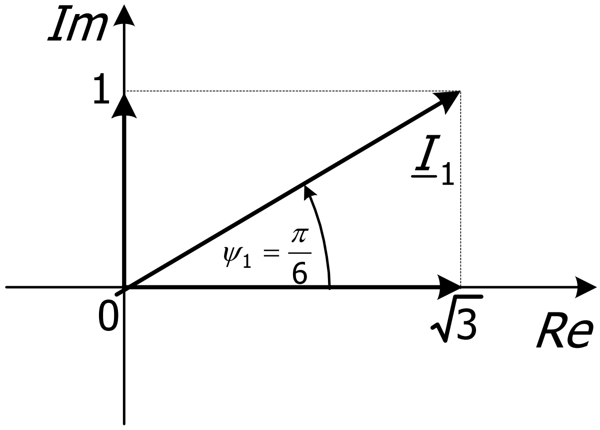
$$\mathrm{e}^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi\,,$$

$$\underline{I}_1 = I_1\,\mathrm{e}^{j\psi_1} = I_1(\cos\psi_1 + j\sin\psi_1) = I_1\cos\psi_1 + j\cdot I_1\sin\psi_1\,.$$

Zamenimo brojne vrednosti u izrazu:

$$\underline{I}_1 = 2\ \mathrm{A}\cdot\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}} = 2\ \mathrm{A}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\ \mathrm{A}\cdot\left(0{,}5\sqrt{3} + j0{,}5\right) = \left(\sqrt{3} + j\right)\mathrm{A}\,.$$

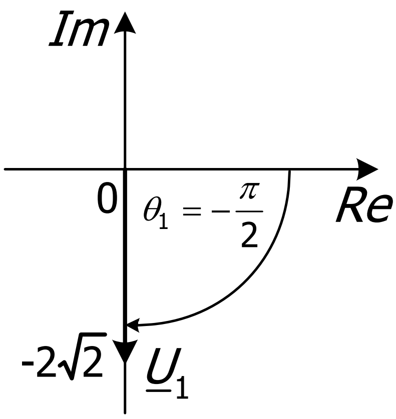
Na slici IV.2.1.1.1 prikazana je struja $\underline{I}_1$ u kompleksnoj ravni. Veličina u kompleksnoj ravni se može nacrtati na dva načina. Prema prvom načinu na realnu osu se nanosi realni deo veličine, a na imaginarnu osu imaginarni deo veličine, pri čemu treba voditi računa o znaku svakog dela. Strelice realne i imaginarne ose pokazuju pozitivan deo ose. U našem slučaju na realnu osu nanosimo $\sqrt{3}$, a na imaginarnu osu nanosimo 1, kao što se vidi na slici IV.2.1.1.1. Dijagonala pravougaonika određenog ovim dvema veličinama je prikaz naše veličine. Dužina ove dijagonale jednaka je efektivnoj vrednosti posmatrane kompleksne veličine, a u našem slučaju je to 2 A. Prema drugom načinu najpre se nacrta ugao i to sa početkom na pozitivnom delu realne ose, prema matematičkom smeru. Matematički smer je smer okretanja suprotno od smera kretanja kazaljke na satu. Ako je ugao pozitivan ugao se određuje u suprotnom smeru od smera kretanja kazaljke na satu, a ako je ugao negativan ugao se određuje u smeru kazaljke na satu. U našem slučaju ugao je pozitivan pa se kompleksna veličina – struja crta pomerena za ugao $\dfrac{\pi}{6}$ suprotno od smera kazaljke na satu, a dužina vektora je jednaka efektivnoj vrednosti. Naravno, na oba načina se dobija ista kompleksna predstava veličine u kompleksnoj ravni.



Slika IV.2.1.1.1

b) Parametri analiziranog napona su:

- amplituda $U_{1\text{m}} = 4$ V,
- efektivna vrednost $U_1 = \frac{U_{1\text{m}}}{\sqrt{2}} = \frac{4\text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ V,
- kružna učestanost $\omega = 314\ \text{s}^{-1}$,
- početna faza $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.



Slika IV.2.1.1.2

U kompleksnom izrazu za napon primenimo Ojlerovu formulu:

$$\underline{U}_1 = U_1\ \text{e}^{j\theta_1} = 2\sqrt{2}\ \text{V} \cdot \text{e}^{-j\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\ \text{V} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\ \text{V} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\ \text{V} \cdot (0 - j) = -j2\sqrt{2}\ \text{V}.$$

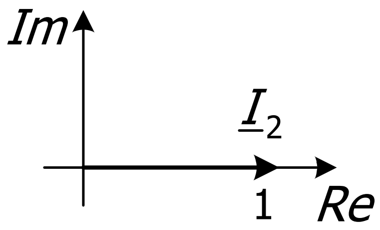
Kompleksni izraz za napon $\underline{U}_1$ ima samo imaginarni deo. Na slici IV.2.1.1.2 prikazan je napon $\underline{U}_1$ u kompleksnoj ravni.

c) Parametri analizirane struje su:

- amplituda $I_{2\text{m}} = 1$ A,
- efektivna vrednost $I_2 = \frac{I_{2\text{m}}}{\sqrt{2}} = \frac{1\text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{2}$ A,
- početna faza $\psi_2 = 0$.

Kompleksni izraz za jačinu struje je:

$$\underline{I}_2 = I_2\ \text{e}^{j\psi_1} = 0{,}5\sqrt{2}\ \text{A} \cdot \text{e}^{j0} = 0{,}5\sqrt{2}\ \text{A} \cdot (\cos 0 + j\sin 0) = 0{,}5\sqrt{2}\ \text{A} \cdot (1 + j0) = 0{,}5\sqrt{2}\ \text{A}$$



Slika IV.2.1.1.3

Kompleksni izraz za struju $\underline{I}_2$ ima samo realni deo. Na slici IV.2.1.1.3 prikazana je struja $\underline{I}_2$ u kompleksnoj ravni.

IV.2.1.2 Za sledeće struje i napone koji su dati u kompleksnom obliku napisati izraze po kojima se menjaju njihove trenutne vrednosti:

a) $\underline{U}_1 = (5 + j5)\ \mathrm{V}$,

b) $\underline{I}_2 = \left(2 - j2\sqrt{3}\right)\ \mathrm{A}$,

c) $\underline{U}_2 = 10\ \mathrm{V}$,

d) $\underline{I}_2 = -\sqrt{2}\ \mathrm{A}$,

e) $\underline{U}_3 = j3\ \mathrm{V}$.

Rešenje:

a) Ako je dat napon u kompleksnom obliku:

$$\underline{U}_1 = \mathrm{Re}[\underline{U}_1] + j\,\mathrm{Im}[\underline{U}_1],$$

onda je efektivna vrednost napona:

$$U_1 = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{U}_1] + \mathrm{Im}^2[\underline{U}_1]},$$

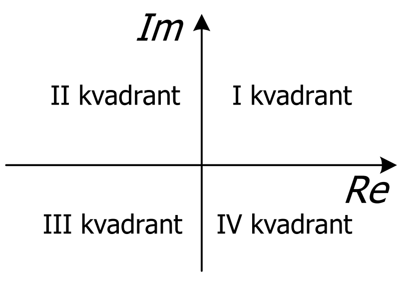
a početna faza:

$$\theta_1 = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[\underline{U}_1]}{\mathrm{Re}[\underline{U}_1]}.$$

Početne faze napona i struje, θ i ψ, mogu imati vrednosti između $-\pi$ i π:

$$-\pi \le \theta, \psi \le \pi,$$

(za razliku od uglova φ i ν, za koje važi $-\frac{\pi}{2} \le \varphi, \nu \le \frac{\pi}{2}$). S obzirom da poslednji izraz ima dva rešenja, vrednost za početnu fazu se određuje na osnovu znakova realnog i imaginarnog dela (odnosno kvadranta u kompleksnoj ravni kome pripada posmatrana veličina). Kada su realni i imaginarni deo pozitivni ($\mathrm{Re}[\underline{U}_1], \mathrm{Im}[\underline{U}_1] > 0$) posmatrana veličina pripada prvom kvadrantu; kada su realni i imaginarni deo negativni ($\mathrm{Re}[\underline{U}_1], \mathrm{Im}[\underline{U}_1] < 0$) posmatrana veličina pripada trećem kvadrantu; za slučaj kada je $\mathrm{Re}[\underline{U}_1] > 0, \mathrm{Im}[\underline{U}_1] < 0$ posmatrana veličina pripada četvrtom



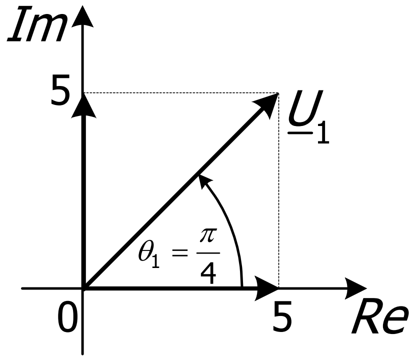
Slika IV.2.1.2.1

kvadrantu; za slučaj kada je $\mathrm{Re}[\underline{U}_1] < 0$, $\mathrm{Im}[\underline{U}_1] > 0$ posmatrana veličina pripada trećem kvadrantu. Kvadranti su označeni na slici IV.2.1.2.1.

U našem slučaju realni i imaginarni deo kompleksnog napona $\underline{U}_1$ su:

$$\mathrm{Re}[\underline{U}_1] = 5\ \mathrm{V} \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}[\underline{U}_1] = 5\ \mathrm{V}.$$

Nacrtajmo kompleksni napon $\underline{U}_1$ u kompleksnoj ravni, kao što je prikazano na slici IV.2.1.2.2.



Slika IV.2.1.2.2

Efektivna vrednost napona je:

$$U_1 = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{U}_1] + \mathrm{Im}^2[\underline{U}_1]} = \sqrt{(5\ \mathrm{V})^2 + (5\ \mathrm{V})^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot (5\ \mathrm{V})^2} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{V},$$

pa je amplituda:

$$U_{1\mathrm{m}} = U_1\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{V} \cdot \sqrt{2} = 10\ \mathrm{V}.$$

Početna faza napona je:

$$\theta_1 = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[\underline{U}_1]}{\mathrm{Re}[\underline{U}_1]} = \mathrm{arctg}\frac{5\ \mathrm{V}}{5\ \mathrm{V}} = \mathrm{arctg}\,1.$$

Izraz arctg 1 ima dva rešenja: $\frac{\pi}{4}$ i $-\frac{3\pi}{4}$. S obzirom da su realni i imaginarni deo pozitivni, kompleksni napon $\underline{U}_1$ se nalazi u prvom kvadrantu kompleksne ravni, kao što se može videti na slici IV.2.1.2.2. (Da bi se izbegle greške u određivanju početne faze najbolje je uvek na početku nacrtati veličinu u kompleksnoj ravni.) U prvom kvadrantu se nalazi vrednost $\frac{\pi}{4}$, pa je:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}.$$

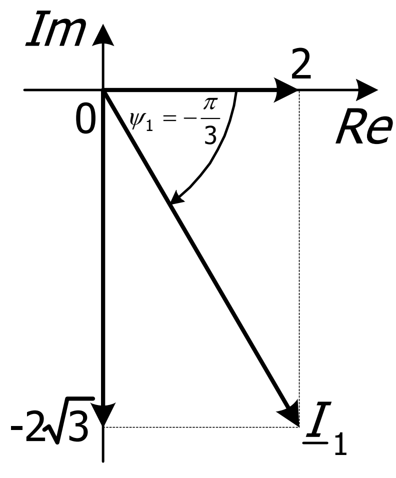
Na osnovu kompleksnog izraza ne može se dobiti informacija o kružnoj učestanosti. Sada možemo napisati izraz za trenutnu vrednost napona:

$$u_1(t) = U_{1\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta_1) = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{V}.$$

b) Realni i imaginarni deo kompleksne struje $\underline{I}_1$ su:

$$\mathrm{Re}[\underline{I}_1] = 2\ \mathrm{A} \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}[\underline{I}_1] = -2\sqrt{3}\ \mathrm{A}.$$

Na slici IV.2.1.2.3 prikazana je struja $\underline{I}_1$ u kompleksnoj ravni.



Slika IV.2.1.2.3

Efektivna vrednost struje je:

$$I_1 = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{I}_1] + \mathrm{Im}^2[\underline{I}_1]} = \sqrt{(2\ \mathrm{A})^2 + \left(-2\sqrt{3}\ \mathrm{A}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4\ \mathrm{A}^2 + 12\ \mathrm{A}^2} = 4\ \mathrm{A},$$

pa je amplituda:

$$I_{1m} = I_1\sqrt{2} = 4\ \text{A}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ \text{A}.$$

Početna faza struje je:

$$\psi_1 = \text{arctg}\frac{\text{Im}[\underline{I}_1]}{\text{Re}[\underline{I}_1]} = \text{arctg}\frac{-2\sqrt{3}\ \text{A}}{2\ \text{A}} = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right).$$

Rešenja ovog izraza su: $-\frac{\pi}{3}$ i $\frac{2\pi}{3}$. Realni deo je pozitivan, a imaginarni deo je negativan, pa se kompleksna struja $\underline{I}_1$ nalazi u četvrtom kvadrantu kompleksne ravni, kao što se može videti na slici IV.2.1.2.2. U četvrtom kvadrantu se nalazi vrednost $-\frac{\pi}{3}$, pa je:

$$\psi_1 = -\frac{\pi}{3}.$$

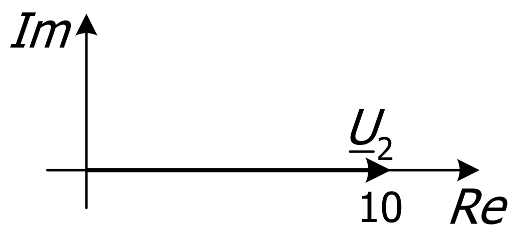
Izraz za trenutnu vrednost struje je:

$$i_1(t) = I_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) = 4\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\ \text{A}.$$

c) Realni i imaginarni deo kompleksnog napona $\underline{U}_2$ su:

$$\text{Re}[\underline{U}_2] = 10\ \text{V} \quad \text{i} \quad \text{Im}[\underline{U}_2] = 0\ \text{V}.$$

Na slici IV.2.1.2.3 prikazan je napon $\underline{U}_2$ u kompleksnoj ravni.



Slika IV.2.1.2.3

Efektivna vrednost napona je:

$$U_2 = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{U}_2] + \text{Im}^2[\underline{U}_2]} = \sqrt{(10\ \text{V})^2 + (0\ \text{V})^2} =$$

$$= \sqrt{(10\ \text{V})^2} = 10\ \text{V},$$

pa je amplituda:

$$U_{2m} = U_2\sqrt{2} = 10\ \text{V}\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ \text{V}.$$

Početna faza napona je:

$$\theta_2 = \text{arctg}\frac{\text{Im}[\underline{U}_2]}{\text{Re}[\underline{U}_2]} = \text{arctg}\frac{0\ \text{V}}{10\ \text{V}} = \text{arctg}\,0.$$

Rešenja ovog izraza su: 0 i π. S obzirom da je realni deo pozitivan, a imaginarni jednak nuli, početna faza napona je:

$$\theta_2 = 0.$$

Ovo se moglo videti i direktno na slici IV.2.1.2.3. Izraz za trenutnu vrednost struje je:

$$u_2(t) = U_{2m}\sin(\omega t + \theta_2) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 0)\ \text{V} = 10\sqrt{2}\sin\omega t\ \text{V}.$$

d) Napišimo potrebne parametre:

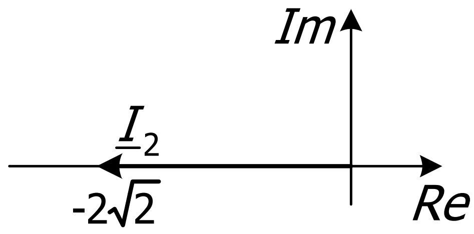
$$\mathrm{Re}[\underline{I}_2] = -2\sqrt{2}\ \mathrm{A},\ \mathrm{Im}[\underline{I}_2] = 0\ \mathrm{A}$$

$$I_2 = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{I}_2] + \mathrm{Im}^2[\underline{I}_2]} = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\ \mathrm{A}\right)^2 + (0\ \mathrm{A})^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{2}\ \mathrm{A}\right)^2} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{A}$$

$$I_{2\mathrm{m}} = I_2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{A}\cdot\sqrt{2} = 4\ \mathrm{A}$$

$$\psi_2 = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[\underline{I}_2]}{\mathrm{Re}[\underline{I}_2]} = \mathrm{arctg}\frac{0\ \mathrm{A}}{-2\sqrt{2}\ \mathrm{A}} = \mathrm{arctg}\ 0$$



Slika IV.2.1.2.4

S obzirom da je realni deo negativan, a imaginarni jednak nuli, i kao što se može videti na slici IV.2.1.2.4, početna faza struje je:

$$\psi_2 = \pi,$$

pa je:

$$i_2(t) = I_{2\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_2) = 4\sin(\omega t + \pi)\ \mathrm{A}.$$

Napomena: Jedino u ovom slučaju moguća su dva rešenja: π i $-\pi$, jer oba pripadaju oblasti definisanosti početne faze, a u suštini predstavljaju istu vrednost. Rešenje $\mathrm{arctg}\ 0 = 0$ smo odmah odbacili jer je realan deo negativan.

e) Napišimo potrebne parametre:

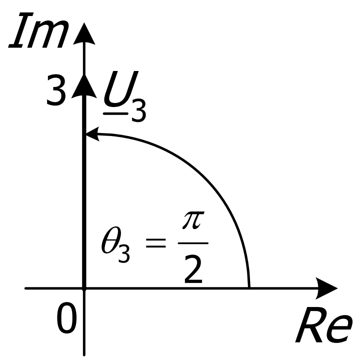
$$\mathrm{Re}[\underline{U}_3] = 0\ \mathrm{V},\ \mathrm{Im}[\underline{U}_3] = j3\ \mathrm{V}$$

$$U_3 = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{U}_3] + \mathrm{Im}^2[\underline{U}_3]} = \sqrt{(0\ \mathrm{V})^2 + (3\ \mathrm{V})^2} =$$

$$= \sqrt{(3\ \mathrm{V})^2} = 3\ \mathrm{V}$$

$$U_{3\mathrm{m}} = U_3\sqrt{2} = 3\ \mathrm{V}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\ \mathrm{V}$$

$$\theta_3 = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[\underline{U}_3]}{\mathrm{Re}[\underline{U}_3]} = \mathrm{arctg}\frac{3\ \mathrm{V}}{0\ \mathrm{V}} = \mathrm{arctg}\ \infty$$



Slika IV.2.1.2.5

Rešenja ovog izraza su $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$. S obzirom da je imaginarni deo pozitivan, a realni jednak nuli, i kao što se može videti na slici IV.2.1.2.5, početna faza napona je:

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2},$$

pa je:

$$u_3(t) = U_{3\mathrm{m}}\sin(\omega t + \theta_3) = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{V}.$$

IV.2.2 POSTUPCI ZA PRORAČUN SLOŽENIH ELEKTRIČNIH MREŽA
TEORIJSKA OSNOVA

- Od zakona se primenjuju Omov, I i II Kirhofov zakon za kompleksne izraze prostoperiodičnih veličina.

- Od postupaka ćemo primenjivati:
  - metod konturnih struja,
  - transfiguracije,
  - Tevenenovu teoremu.

- Sve ove postupke smo učili kod jednosmernih električnih struja, pa ćemo ih se sada samo podsetiti.

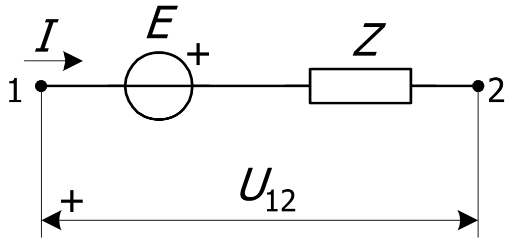
ZADACI

IV.2.2.1.1 Za deo kola prostoperiodične struje sa slike poznato je :

$\underline{E} = (10 - j20)\ \mathrm{V}$, $\underline{Z}_1 = 100(1 + j3)\ \Omega$,

$\underline{I} = (-20 - j40)\ \mathrm{mA}$.

Odrediti efektivnu vrednost i početnu fazu napona U_{12}.



<u>*Rešenje:*</u>

Za kompleksne izraze struja i napona važe svi zakoni sa kojima smo se upoznali kod vremenski nepromenljivih (jednosmernih) struja. Zbog toga ih ovde nećemo detaljno ponavljati jer se pretpostavlja da su ih studenti već naučili.

Primenimo izraz za računanje napona između dve tačke krećući se od tačke 2 ka tački 1:

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}\,\underline{I} - \underline{E} = 100(1 + j3)\ \Omega \cdot (-20 - j40) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} - (10 - j20)\ \mathrm{V} =$$

$$= 100(1 + j3)\ \Omega \cdot (-20)(1 + j2) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} - (10 - j20)\ \mathrm{V} =$$

$$= -100 \cdot 20 \cdot 10^{-3}(1 \cdot 1 + j3 \cdot 1 + 1 \cdot j2 + j3 \cdot j2)\ \mathrm{V} - (10 - j20)\ \mathrm{V} =$$

$$= -100 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + j3 + j2 - 6)\ \mathrm{V} - (10 - j20)\ \mathrm{V} = -2 \cdot (-5 + j5)\ \mathrm{V} - (10 - j20)\ \mathrm{V} =$$

$$= (10 - j10)\ \mathrm{V} - (10 - j20)\ \mathrm{V} = j10\ \mathrm{V}.$$

Ovde smo primenili pravilo o množenju dva kompleksna broja (množe se realni i imaginarni delovi kompleksnih brojeva, svaki sa svakim) i o sabiranju dva kompleksna broja (sabiraju se realni sa realnim i imaginarni sa imaginarnim delom), (pogledati *matematički podsetnik*, strana XII).

Realni i imaginarni deo napona $\underline{U}_{12}$ su:

$$\mathrm{Re}[\underline{U}_{12}] = 0\ \mathrm{V} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{Im}[\underline{U}_{12}] = j10\ \mathrm{V}$$

Efektivna vrednost napona je:

$$U_{12} = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{U}_{12}] + \mathrm{Im}^2[\underline{U}_{12}]} = \sqrt{(0\ \mathrm{V})^2 + (10\ \mathrm{V})^2} =$$

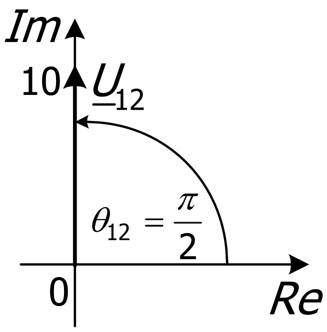
$$= \sqrt{(10\ \mathrm{V})^2} = 10\ \mathrm{V},$$

pa je amplituda:

$$U_{12\mathrm{m}} = U_{12}\sqrt{2} = 10\ \mathrm{V} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ \mathrm{V}.$$

Početna faza napona je:

$$\theta_{12} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[\underline{U}_{12}]}{\mathrm{Re}[\underline{U}_{12}]} = \mathrm{arctg}\frac{10\ \mathrm{V}}{0\ \mathrm{V}} = \mathrm{arctg}\ \infty = \frac{\pi}{2}.$$



Slika IV. 2.2.1.1.1

Na slici IV.2.2.1.1.1 prikazan je napon $\underline{U}_{12}$ u kompleksnoj ravni.

IV.2.2.1.2 Redna veza *RLC* elemenata, $R = 10\ \Omega$, $L = 10$ mH i $C = 500\ \mu\text{F}$, priključena je na napon $\underline{U} = 100$ V. Napisati izraz za trenutnu vrednost struje ako je $f = 100$ Hz.

Rešenje:

Ova vrsta zadataka može se rešiti u realnom ili u kompleksnom domenu. Rešimo zadatak u kompleksnom domenu.

Kružna učestanost je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100\ \text{Hz} = 628\ \text{s}^{-1}$$

Reaktansa ove redne veze je:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 628\ \text{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\ \text{H} - \frac{1}{628\ \text{s}^{-1} \cdot 500 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 6{,}28\ \Omega - 3{,}18\ \Omega = 3{,}1\ \Omega .$$

Primetimo da je ova veza pretežno induktivnog karaktera pošto je reaktansa pozitivna.
Kompleksni izraz za impedansu je:

$$\underline{Z} = R + jX = 10\ \Omega + j3{,}1\ \Omega = (10 + j3{,}1)\Omega .$$

Prema Omovom zakonu struja kroz ovu rednu vezu je:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100\ \text{V}}{(10 + j3{,}1)\Omega} = \frac{100\ \text{V}}{(10 + j3{,}1)\Omega} \cdot \frac{10 - j3{,}1}{10 - j3{,}1} = \frac{100\ \text{V} \cdot (10 - j3{,}1)}{(10 + j3{,}1)(10 - j3{,}1)\Omega} = 100 \cdot \frac{10 - j3{,}1}{10^2 + 3{,}1^2}\ \text{A} =$$

$$= 100 \cdot \frac{10 - j3{,}1}{109{,}61}\ \text{A} = 0{,}91(10 - j3{,}1)\ \text{A} .$$

Ovde smo primenili pravilo o deljenju dva kompleksna broja: i brojilac i imenilac se množe konjugovano kompleksnom vrednošću imenioca. Konjugovano kompleksna vrednost nekog kompleksnog broja ima realan deo isti kao posmatrani kompleksni broj, dok je imaginarni deo suprotnog znaka. S obzirom da je proizvod dva konjugovano kompleksna broja realan broj (čija je vrednost jednaka zbiru kvadrata realnog i imaginarnog dela posmatranih konjugovano kompleksnih brojeva) ovaj način rešavanja količnika dva kompleksna broja se primenjuje se da bi se u imeniocu dobio realan broj. Rezimirajmo na našem primeru: imenilac je $10 + j3{,}1$, pa je konjugovano kompleksna vrednost $10 - j3{,}1$, proizvod ova dva broja je $10^2 + 3{,}1^2 = 109{,}61$.

Odredimo izraz za trenutnu vrednost struje:

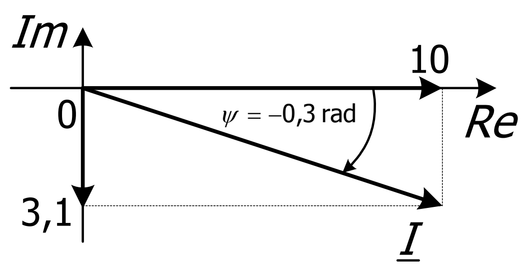
$$\text{Re}[\underline{I}] = 0{,}91 \cdot 10\ \text{A} \quad \text{i} \quad \text{Im}[\underline{I}] = -0{,}91 \cdot 3{,}1\ \text{A} ,$$

$$I = \sqrt{\text{Re}^2[\underline{I}] + \text{Im}^2[\underline{I}]} = \sqrt{(0{,}91 \cdot 10\ \text{A})^2 + (-0{,}91 \cdot 3{,}1\ \text{A})^2} =$$

$$= 0{,}91\sqrt{(10\ \text{A})^2 + (3{,}1\ \text{A})^2} = 0{,}91\sqrt{109{,}61\ \text{A}^2} = 9{,}52\ \text{A} ,$$

$$I_m = I\sqrt{2} = 9{,}52\ \text{A} \cdot \sqrt{2} = 13{,}47\ \text{A} ,$$

$$\psi = \text{arctg}\frac{\text{Im}[\underline{I}]}{\text{Re}[\underline{I}]} = \text{arctg}\frac{-3{,}1\ \text{A}}{10\ \text{A}} = \text{arctg}\,(-0{,}31).$$



Slika IV.2.2.1.2.1

Rešenja su - 0,31 i 2,84 (prisetimo se, kalkulator daje samo rešenje između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$, dakle u ovom slučaju daće rešenje - 0,31, a drugo rešenje dobijamo tako što na prvo rešenje dodamo π). Kompleksna struja se nalazi u četvrtom kvadrantu (realni deo pozitivan, imaginarni deo negativan), pa je:

$$\psi = -0{,}3 .$$

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi) = 13{,}47 \sin(628t - 0{,}3)\ \mathrm{A} .$$